Coloración de Grafos

M.A. Fiol

Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica

Universitat Politècnica de Catalunya

email: fiol@mat.upc.es

May 21, 2000

Abstract

Estudiamos algunos resultados sobre rama-coloración de grafos y su relación con el teorema del mapa de cuatro colores. A tal fin, se introduce la noción de “coloración” de una conjunto de ramas y se estudian sus propiedades relacionadas con el álgebra de Boole.

1 Grafos Planos: Fórmula de Euler y aplicaciones

La conocida fórmula de Euler afirma que, en un grafo plano con $n := |V|$ vértices, $m := |E|$ ramas y $r := |R|$ regiones, se cumple $r + n = m + 2$. El número r de regiones también puede interpretarse como la cardinalidad del conjunto V^* de vértices del grafo dual G^*. Esta interpretación da a la fórmula un aspecto más simétrico:

$$(|V^*| - 1) + (|V| - 1) = E,$$

y permite además demostrarla sin tener que usar inducción, identificando los dos paréntesis anteriores como el número de ramas de dos árboles generadores, pertenecientes a G^* y G, respectivamente (ver [1, 2]). En este primer tema repasaremos algunas de las consecuencias más interesantes de dicha fórmula. Por ejemplo, veremos que *en un grafo plano el número de* *ramas satisface* $m \leq 3n-6$ y, si no contiene triángulos, $m \leq 2n-4$. A partir de estos resultados se demuestra que los grafos completo K_5 y bipartito completo $K_{3,3}$ no son planos; o que todo grafo plano contiene un vrtice u de grado $\delta(u) \leq 5$. A partir de este hecho se prueba el "Teorema de los Cinco Colores": *Las regiones de todo mapa plano pueden colorearse con cinco colores de manera que regiones adjaccentes, es decir con frontera común, tengan distinto color.*

2 Rama-coloración de grafos: Coloraciones y el Teorema de los Cuatro Colores

En este tema vamos a considerar el caso de la rama-coloración de grafos cúbicos o 3-regulares (también llamada *Tait-coloración*, y en la que se colorean las ramas usando 3 colores y se exige que las ramas incidentes a un mismo vértice tengan distinto color). Veremos que este problema está ligado estrechamente con el Teorema de los Cuatro Colores ('T4C').

Para ello se introduce una generalización natural del concepto de "color", que describe de forma muy simple la coloración ("**0**" ó "**1**") de cualquier conjunto de (semi)ramas o, de forma más abstracta, de cualquier familia $\mathcal{F}$ de colores elegidos entre tres distintos, digamos $\mathcal{C} = \{1, 2, 3\}$. De forma más precisa, supongamos que $\mathcal{F}$ está constituida por m_i colores $i \in \mathcal{C}$. Entonces decimos que $\mathcal{F}$ tiene *Boole-coloración* $\mathbf{0}$, y lo denotamos por $\Psi(\mathcal{F}) = \mathbf{0}$, cuando

$$m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv m \pmod 2.$$

Por otra parte, decimos que $\mathcal{F}$ tiene *Boole-coloración* $\mathbf{1}$ (o, más específicamente, $\mathbf{1}_a$), y lo denotamos por $\Psi(\mathcal{F}) = \mathbf{1}(\mathbf{1}_a)$, cuando

$$m_a + 1 \equiv m_b \equiv m_b \equiv m + 1 \pmod 2,$$

donde las letras a, b, c denotan los colores $1, 2, 3$ en cualquier orden. Para más detalles, ver [3, 5].

3 Snarks y Algebra de Boole

Es este último tema trataremos el problema de la construcción y caracterización de "snarks"; ésto es, grafos cúbicos no Tait-coloreables (también llamados “de clase dos”). Veremos que las coloraciones **0** y **1** estudiadas anteriormente permiten aplicar la teoría del álgebra de Boole (usada comúnmente para el estudio de circuitos lógicos) para hallar familias infinitas de snarks que incluyen muchas de las construcciones obtenidas mediante otros métodos [6]. Los detalles sobre esta técnica pueden encontrase en [4].

References

[1] M. Aigner y G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, Berlin, 1998.

[2] F. Comellas, J. Fàbrega, A.S. Lladó y O. Serra, *Matemàtica Discreta*, Politext 26, Edicions UPC, Barcelona, 1994.

[3] M.A. Fiol y M.L. Fiol, Coloracions: un nou concepte dintre la teoría de grafs, *L'ESCAIRE* **11** (1984) 33–44.

[4] M.A. Fiol, A Boolean algebra approach to the construction of snarks, *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, Vol. 1, 493–524, (eds. Y. Alavi et al., G. Chartrand, O.R. Oellermann y A.J. Schwenk) John Wiley & Sons, New York, 1991.

[5] M.A. Fiol, c-Critical graphs with maximum degree three, *in: Graph Theory, Combinatorics, and Applications (Proc. 7th Int. Conf. on the Theory and Appl. of Graphs, Kalamazoo'92)*, Vol. 1, New York (1995) 403–411.

[6] R. Isaacs, Infinite families of nontrivial graphs which are not Tait colorable, *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), no. 3, 221–239.